Aula 5

Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, ou seja, uma variedade de dimensão 2, parametrizada (globalmente) por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, e seja $\phi : S \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo sobre a superfície. Então, define-se o **integral de ϕ sobre a superfície S**, e designa-se por

$$\int_S \phi \quad \text{ou} \quad \int_S \phi\, dS,$$

o valor

$$\int_\Omega \phi(g(u,v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du\, dv,$$

sempre que este integral (calculado sobre $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$) exista.

Em particular, fazendo $\phi = 1$, obtém-se a área da superfície S

$$A(S) = \mathrm{Vol}_2(S) = \int_S 1\, dS = \int_\Omega \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du\, dv.$$

Definição: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão m, parametrizada (globalmente) por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, e seja $\phi : M \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo sobre a variedade. Então, define-se o **integral de ϕ sobre a variedade** M, e designa-se por

$$\int_M \phi \quad \text{ou} \quad \int_M \phi \, dV_m,$$

o valor

$$\int_\Omega \phi(g(u))(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} du,$$

sempre que este integral (calculado sobre $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$) exista. Em particular, fazendo $\phi = 1$, obtém-se o volume m-dimensional da variedade M

$$\text{Vol}_m(M) = \int_M 1 \, dV_m = \int_\Omega (\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} du.$$

Invariância do integral para diferentes parametrizações

Proposição: Se uma mesma variedade M é parametrizada (globalmente) por duas parametrizações diferentes, digamos, $g : u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \to M \subset \mathbb{R}^n$ e $h : v \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m \to M \subset \mathbb{R}^n$, então $h^{-1} \circ g : \Omega \to \Lambda$ é uma mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^m$ e tem-se a relação entre os elementos de volume das duas parametrizações

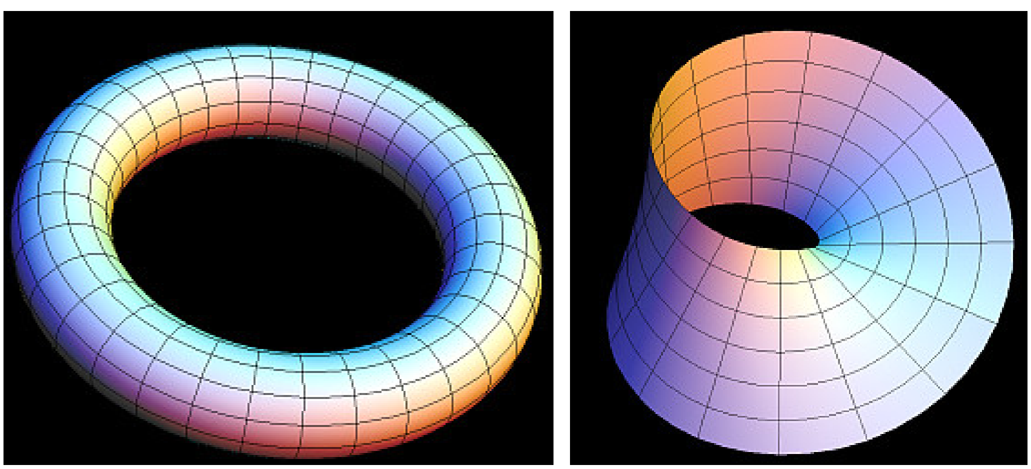
$$(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} = (\det Dh(v)^T Dh(v))^{1/2} \left| \det \frac{\partial v}{\partial u} \right|,$$

pelo que o integral sobre M é invariante

$$\int_\Omega \phi(g(u))(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} du =$$
$$= \int_\Lambda \phi(h(v))(\det Dh(v)^T Dh(v))^{1/2} dv.$$

Fluxo através de uma superfície (orientável)

Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, isto é, uma variedade de dimensão 2. Diz-se que S **é uma superfície orientável** se existir um campo vetorial contínuo $\nu : S \to \mathbb{R}^3$ tal que em cada ponto $p \in S$ o vetor $\nu(x)$ é unitário e normal a S.
Quando tal é verificado, existem duas alternativas para esse campo, $\pm\nu$, e cada uma delas diz-se que define **uma orientação de** S (das duas possíveis).
Esta definição é generalizável a qualquer variedade $M \subset \mathbb{R}^n$, de dimensão $n-1$ (designa-se por **hipersuperfície**).



Orientável vs Não-orientável

Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável, ou, mais geralmente $S \subset \mathbb{R}^n$, uma hipersuperfíce (variedade de dimensão $n-1$) orientável. Seja $\nu : S \to \mathbb{R}^n$ a escolha de uma das duas possíveis orientações de S e seja $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo definido em S. Designa-se por **fluxo de $\mathbf{F}$ através de S na orientação dada por ν** o integral

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

Proposição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, ou seja, uma variedade de dimensão 2, orientável, parametrizada (globalmente) por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, e seja $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo sobre a superfície. Então, o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S é dado por

$$\pm \int_\Omega \mathbf{F}(g(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right) du \, dv,$$

com a escolha do sinal $\pm$ de acordo com a orientação escolhida para a superfície.

Divergência

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, um campo vetorial de classe pelo menos $C^1(\Omega)$. Designa-se por **divergência de** $\mathbf{F}$, e representa-se por $\operatorname{div} \mathbf{F}$ ou $\nabla \cdot \mathbf{F}$, o operador diferencial que transforma o campo vetorial $\mathbf{F}$ num campo escalar, dado por

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Diz-se que um campo vetorial $\mathbf{F}$ é **solenoidal ou incompressível** se tem divergência nula,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0.$$

Propriedades: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campos vetoriais de classe $C^1(\Omega)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe $C^2(\Omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.
Então tem-se:

i) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{tr} D\mathbf{F}$ (traço da matriz jacobiana de $\mathbf{F}$).

ii) $\operatorname{div} \mathbf{x} = \operatorname{div}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n$.

iii) $\operatorname{div}(\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{F} + \beta \operatorname{div} \mathbf{G}$ (linearidade).

iv) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$.

v) $\operatorname{div} \nabla f = \Delta f$,

em que Δf é o chamado **laplaciano** de f dado por

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$